

Devoir de contrôle N°2

Durée : 1h

Epreuve : Analyse

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Problème:

On rappelle que les fonctions hyperboliques sont définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
3. Soit g une application dérivable sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

(a) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, en appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$F: t \mapsto \operatorname{sh}^2(t)g(x) - g(t)\operatorname{sh}^2(x),$$

montrer qu'il existe c_x entre 0 et x tel que

$$2\operatorname{sh}(c_x)\operatorname{ch}(c_x)g(x) = g'(c_x)\operatorname{sh}^2(x).$$

(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)}$.

(c) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de $f'(0)$.

4. (a) En utilisant le changement de variable $X = e^x$, résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$.
On note α sa solution.
- (b) Vérifier que $\alpha \in]0, 1[$ et que $f(\alpha) = \alpha$. ($\sqrt{2} \approx 1.414$ et $e \approx 2.718$).

5. On admet que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t) \leq \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2(t)$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leq \frac{1}{2}.$$

6. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

7. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(c) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.